# কাকিনা, লালমনিরহাট।

বিশ্বনাথ রায়
প্রভাষক ও বিভাগীয় প্রধান,
অথনীতি বিভাগ,
উত্তর বাংলা কলেজ, কাকিনা।
E-mail: roy.bisawnath@yahoo.com
Mobile: 01710587662

**অনার্স তৃতীয় বর্ষ**
**অর্থনীতির জন্য পরিসংখ্যান**
**বিষয় কোডঃ- ২৩২২০৩**

# সম্ভাবনা তত্ত্ব

## সম্ভাবনা কি (What Is Probability)?

আধুনিক পরিসংখ্যান শাস্ত্রের ভিত্তি হলো সম্ভাবনাতত্ত্ব (Theory of Production)। সম্ভাবনা তত্ত্ব মূলত উচ্চতর গণিত শাস্ত্রের একটি বিষয়। সপ্তদশ শতাব্দীতে প্যাসকাল, ফারমেট, দ্য মেয়র, হয়জেনস প্রমুখ মনীষী সম্ভাবনা তত্ত্বের সুষ্ঠু গাণিতিক ব্যখ্যা প্রদানের মাধ্যমে এর বিকাশ সাধন করেন। জুয়া খেলার জয়ের পদ্ধতি নিরূপণের ভিত্তিতে রচিত এই তত্ত্বের উন্নতি সাধনে পরবর্তীতে যাদের অবদান বিশেষভাবে স্বীকৃত তারা হলেন জেকব বার্ণোলি, আব্রাহাম মোরিভ এবং অধ্যাপক ল্যাপলাস। এদের মধ্যে সম্ভাবনা তত্ত্বের উন্নতি সাধনে অধ্যাপক ল্যাপলাসের ভূমিকাই সর্বাপেক্ষা বেশী। অতঃপর এই তত্ত্বের উন্নতি সাধনে এগিয়ে আসেন রাশিয়ান গণিত শাস্ত্রবিদ Chebyshev Ges Markov। আর অতি সম্প্রতিকালে সম্ভাবনা তত্বে যে, পরিসংখ্যানবিদের অবদান সর্বাপেক্ষা বেশী তিনি হলেন রাশিয়ান পরিসংখ্যানবিদ A. Ko. Emogorov ।

কোন একটি ঘটনা ঘটবে কি না ঘটবে, এর গাণিতিক পরিমাপকেই বলা হয় সম্ভাবনা। অন্যভাবে বলা যায়, কোন ঘটনার মোট সম্ভাব্য ফলাফলের সাথে এর অনুকূল ফলাফলের অনুপাতই হল সম্ভাবনার গাণিতিক পরিমাপ।

$$\text{কোন ঘটনার সম্ভাব্যতার গাণিতিক পরিমাপ} = \frac{\text{সমসম্ভাব্য অনূকুল ঘটনার সংখ্যা}}{\text{সমসম্ভাব্য মোট ফলাফলের সংখ্যা}}$$

$$\text{অর্থাৎ সম্ভাব্যতা} = \frac{\text{কোন ঘটনায় অনূকুল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}}{\text{মোট নমুনাবিন্দুর সংখ্যা}}$$

উদাহরণ ১ঃ

একটি মুদ্রা 100 বার নিক্ষেপ করলে 53 বার শাপলা পাওয়া যায়, এক্ষেত্রে শাপলা এর আপেক্ষিক গনসংখ্যা 53/100 = 0.53। পুনরায় মুদ্রাটি নিক্ষেপ করলে 49 বার শাপলা পাওয়া যায়। এক্ষেত্রে শাপলা এর আপেক্ষিক গনসংখ্যা 49/100 = 0.49। এই আপেক্ষিক গনসংখ্যা কখনই 0.2 বা 0.3 হবে না। সব সময় ০.৫ এর কাছাকাছি হবে। এই ধারনা অনুসারে, জার্মান গণিতবিদ Von Mises সম্ভাবনার গাণিতিক সংজ্ঞা দেন, P(A) = lim n→∞ m/n = 0.5।


সূত্র: বাংলাদেশ ব্যাংক

উপরের উদাহরণটি আরেকটু সহজে ব্যাখ্যা করা যাক ।
একটি ১ টাকার কয়েন, যদি ছুড়েঁ মারেন, তবে শাপলা বা মানুষ আশার সম্ভাবনা কত?
জেনে রাখা ভাল যে, বাংলাদেশের ১ টাকার কয়েন, একপাশে মানুষ এবং অপর পাশে শাপলা রয়েছে । সূত্রটা হল, অনুকূল ঘটনা/মোট সম্ভাব্য ঘটনার সংখ্যা
উত্তর হবে, ১/২

**সম্ভাবনা তত্ত্বে চার ধরণের সম্ভাবনা থাকে। যথাঃ-**

- **ক. ধ্রুপদী (Classical) বা অবরোহী (A priori) বা গাণিতিক (Mathematical) সম্ভাবনা,**
- **খ. পরীক্ষালব্ধ (Empirical) বা আরোহী (A posterior) বা পরিসংখ্যানিক (Statistical) বা আপেক্ষিক (Relative) সম্ভাবনা।**
- **গ. ব্যক্তি নির্ভর (Subjective) সম্ভাবনা।**
- **ঘ. স্বতঃসিদ্ধ (Axiomatic) সম্ভাবনা ।**

**ক. ধ্রুপদী (Classical) বা অবরোহী (A priori) বা গাণিতিক (Mathematical) সম্ভাবনা:-** ফরাসী গণিত শাস্ত্রবিদ জ্যাকব বার্ণোলী সর্বপ্রথম এ ধরণের সম্ভাবনার কথা বলেন। পরবর্তীতে ফরাসী জ্যোতিশাস্ত্র ও গণিতশাস্ত্রবিদ পি.এস. লাপ্লাস এই সম্ভাবনাকে সংজ্ঞায়িত করেন। ইহা অতি প্রাচীন বিধায় একে ধ্রুপদী সম্ভাবনাও বলা হয়। কোন দৈব পরীক্ষণের একটি ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যাকে ঐ পরীক্ষণের সমসম্ভাব্য, পরস্পর বর্জনশীল ও সম্পূরক ফলাফল সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে যে মান পাওয়া যায় তাকে ঐ ঘটনার ধ্রুপদী সম্ভাবনা বলে।

কোন পরীক্ষণে n সংখ্যক সমসম্ভাব্য, পরস্পর বর্জনশীল ও সম্পূরক ফলাফলের মধ্যে কোন ঘটনা A এর অনুকূল ফলাফল সংখ্যা m হলে, A এর সম্ভাবনা হবে-

$$P(A) = \frac{\text{A ঘটনার অনূকুল সংখ্যা}}{\text{মোট ফলাফলের সংখ্যা}} = \frac{m}{n}$$

উদাহরণ:- কোন একটি নিরপেক্ষ ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে জোড় সংখ্যা উপরে উঠার সম্ভাবনাই ধ্রুপদী সম্ভাবনা । এক্ষেত্রে মোট ফলাফল সংখ্যা n= 6
জোড় সংখ্যা উপরে উঠার ঘটনা, A= {2, 4, 6}
এখানে A ঘটনার অনুকূল সংখ্যা, m=3

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

**ধ্রুপদী সম্ভাবনার সীমাবদ্ধতাসমুহ (Limitations of The Classical Probability)**

১. অসীম বিচ্ছিন্ন নমুনাক্ষেত্রের বেলায় এই সংজ্ঞাটি প্রযোজ্য নয়।
২. নমুনাক্ষেত্রের নমুনা বিন্দুসমুহ সম সম্ভাব্য না হলে সংজ্হাটি প্রয়োগ করা যায় না।
৩. ব্যবহারিক ক্ষেত্রে অনেক সময় কোন পরীক্ষার সকল ফলাফল গণনা করা যায় না, সেক্ষেত্রে এই সংজ্ঞার সাহায্যে সম্ভাবনা নির্ণয় করা যায় না।
৪. অবিচ্ছিন্ন নমুনা ক্ষেত্রের বেলায় এই সংজ্ঞা প্রযোজ্য নয়।

খ. পরীক্ষালব্ধ (Empirical) বা আরোহী (A posterior) বা পরিসংখ্যানিক (Statistical) বা আপেক্ষিক (Relative) সম্ভাবনা:-পূর্ব নির্ধারিত শর্ত ঠিক রেখে কোন পরীক্ষাকে অসংখ্যবার পুনরাবৃত্তি করা হলে কোন ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যার সঙ্গে পরীক্ষার মোট ফলাফল সংখ্যার অনুপাতের সীমায়িত মানকে উক্ত ঘটনার আরোহী সম্ভাবনা বলে । ধরি, কোন ঘটনা A এর অনুকূল ফলাফল সংখ্যা m এবং মোট চেষ্টার সংখ্যা n কে অসংখ্যবার পুনরাবৃত্তি করা হলে, A এর সম্ভাবনা হবে-$P(A) = \lim_{n\to\propto} \frac{m}{n}$
এই সংজ্ঞাটি প্রদান করেন জার্মান গণিতবিদ R. Von Mises.

উদাহরণ: একটি নিঝুঁকি মুদ্রা 10, 100, 1000, 5000, 10000 বার নিক্ষেপ করা হল এবং মাথা আসার সংখ্যা ও আপেক্ষিক ঘটন সংখ্যা নিম্নরূপ-

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| মোট নিক্ষেপের সংখ্যা | 10 | 100 | 1000 | 5000 | 10000 |
| মাথা আসার সংখ্যা | 4 | 46 | 496 | 2491 | 5000 |
| আপেক্ষিক ঘটন সংখ্যা | 0.4 | 0.46 | 0.496 | 0.4982 | 0.50 |

উপরের উদাহরণ হতে দেখা যায়, ট্রায়ালের সংখ্যা যতই বাড়তে থাকে মাথার আপেক্ষিক ঘটনসংখ্যা ক্রমান্বয়ে 0.5 এর দিকে ধাবিত হচ্ছে । ফলে 0.5 হল মাথা আসার সম্ভাবনা। উল্লেখ্য নিঝুঁকি মুদ্রার ক্ষেত্রে ধ্রুপদী সংজ্ঞানুসারে মাথা আসার সম্ভাবনা 0.5।

**পরীক্ষালব্ধ বা আরোহী বা পরিসংখ্যানিক বা আপেক্ষিক সম্ভাবনা (Limitations of The Empirical or A posterior or A Statistical or A Relative Probability) এর সীমাবদ্ধতাসমুহঃ-**

১. পূর্ব নির্ধারিত শর্তে কোন পরীক্ষা বারবার পুনরাবৃত্তি করা বাস্তবে অসম্ভব।
২. কোন পরীক্ষা অসীম সংখ্যক বার পরিচালনা করা বাস্তবে অসম্ভব, নিছক কল্পনা প্রসূত ধারণা মাত্র।
৩. এক্ষেত্রে প্রাপ্ত সম্ভাবনা নির্দিষ্ট অভিন্ন নাও হতে পারে।

**গ. ব্যক্তি নির্ভর (Subjective) সম্ভাবনাঃ-** যে সম্ভাবনা কোন ব্যক্তি বিশেষের বিশ্বাস, বিবেচনা ও অভিজ্ঞতার আলোকে নির্ভর করা হয় তাকে ব্যক্তি নির্ভর সম্ভাবনা বলে। সংজ্ঞাটি প্রদান করেন Kynes ও Jeffreys প্রমুখ গণিতবিদগণ।

যেমন- আজ বৃষ্টি হবার সম্ভাবনা ক ব্যক্তি ৭০% মনে করলেও খ ব্যক্তির মতে ২০% হতে পারে।

ঘ. **স্বতঃসিদ্ধ (Axiomatic) সম্ভাবনাঃ-** ইহা সম্ভাবনার সবচেয়ে আধুনিক সংজ্ঞা এবং ইহার প্রবক্তা হলেন রাশিয়ান গণিতবিদ A. N. Kolmogorov. এক্ষেত্রে সম্ভাবনার বিস্তারিত সংজ্ঞার পরিবর্তে কিছু স্বত:সিদ্ধ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। তাই একে স্বত:সিদ্ধ সম্ভাবনা বলে। স্বত:সিদ্ধসমুহ হলোঃ

১. কোন ঘটনার সম্ভাবনা শূন্য হতে একের মধ্যে অথাৎ $0 \leq P(A) \leq 1$
২. নমুনাক্ষেত্রের মোট সম্ভাবনা, $P(S) = 1$
৩. যদি $A$ ও $B$ পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হয় তবে $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ হবে।

## সম্ভাবনার কতিপয় মৌলিক ধারণা

১. **পরীক্ষণ (Experiment):-** নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে পরিচালিত এমন একটি কাজ, যা পুনরাবৃত্তি ঘটানো যায় তাকে পরীক্ষণ (Experiment) বলে। যেমন- কোন একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপ করার কাজই পরীক্ষণ।

২. **দৈব অথবা সমসম্ভব পরীক্ষা (Random Experiment):-** যে সব পরীক্ষা বা পর্যবেক্ষণের ক্ষেত্রে কোন ঘটনা ঘটবে বা কোন ফল পাওয়া যাবে তা নিশ্চিতভাবে বলা যায় না তাদের সমসম্ভব পরীক্ষা (Random experiment) বলে । যেমন- একটি ঝোঁকশূন্য কোনো মুদ্রাকে উপরের দিকে ছুড়ে দেওয়া হল । এ ক্ষেত্রে হেড পড়বে না টেল পড়বে তা নিশ্চিত ভাবে বলা যায় না ।

৩. **চেষ্টা (Trial):-** কোন একটি দৈব পরীক্ষণে প্রয়োজনীয় কার্যক্রম সম্পন্ন করাকে চেষ্টা বা ট্রায়াল বলে। যেমন-কোন একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা ৫ বার নিক্ষেপ করা হলে , প্রত্যেক নিক্ষেপই এক একটি ট্রায়াল বা চেষ্টা।

৪. **নমুনাক্ষেত্র (Sample Space):-** কোন একটি দৈব পরীক্ষণের সম্ভাব্য ফলাফল সমুহের সেটকে নমুনাক্ষেত্র বলে। নমুনা ক্ষেত্রকে সংক্ষেপে S দ্বারা লিখা হয়। যেমন- একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় সম্ভাব্য ফলাফলসমুহ H ও T । অতএব, নমুনাক্ষেত্র $S=\{H, T\}$।

৫. **নমুনাবিন্দু (Sample Point):-** নমুনা ক্ষেত্রের প্রত্যেক ফলাফলকে নমুনাবিন্দু বলে। যেমন- একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় সম্ভাব্য ফলাফলসমুহ H ও T । এখানে H ও T নমুনা বিন্দু।

৬. **ঘটনা (Event):-** সমসম্ভব পরীক্ষার সঙ্গে সম্পর্কিত যে কোনো একটি ফলকে একটি ঘটনা (Event) বলে । উদাহরণ:- একটি ঝোঁকশূন্য কোনো মুদ্রাকে উপরের দিকে ছুড়ে দেওয়া হল । এ ক্ষেত্রে হেড পড়বে অথবা টেল পড়বে । এক্ষেত্রে হেড এবং টেলের প্রত্যেকটিকে সমসম্ভব পরীক্ষার ঘটনা বলে ।

৭. **সমসম্ভাব্য ঘটনা (Equally Likely Events):-** সমসম্ভব পরীক্ষার সঙ্গে সম্পর্কিত দুই বা ততোধিক ঘটনাকে সমভাবে সম্ভাব্য ঘটনা বলা হবে যখন ঘটনাসমূহের প্রত্যেকটি ঘটনা ঘটিবার সম্ভাবনা সমান হবে । উদাহরণ:- একটি ঝোঁকশূন্য মুদ্রাকে উৎক্ষেপণ করলে হেড ও টেল পড়ার সম্ভাবনা ৫০% অর্থাৎ সমান । আবার কোনো লুডোর ছক্কাকে ফেললে এক, দুই, তিন, চার, পাঁচ, ছয় পড়ার সম্ভাবনা সমান হয় । প্রতীকের সাহায্যে A ও B ঘটনাদ্বয় সমভাবে ঘটলে $P(A)=P(B)$ হবে ।

৮. **অনুকূল ঘটনা (Favourable Events):-** একটি দৈব অথবা সমসম্ভব পরীক্ষণে কোন একটি ঘটনার স্বপক্ষের ফল বা ফলগুলোকে উক্ত ঘটনার অনুকুল ঘটনা বলা হয়। যেমন :- দুটি মুদ্রাকে উৎক্ষেপণ করলে যে ফলগুলি পাওয়া যায় তা হল HH, HT, TH এবং TT, যেখানে 'H' হল হেড এবং 'T' হল টেল । ঘটনা চারটি থেকে দেখা যাচ্ছে যে, কমপক্ষে একটি হেড পড়ার সম্ভাবনা হল ৩ । অতএব হেড পড়ার পক্ষে অনুকূল ঘটনা হল ৩ । একই রকমভাবে টেল পড়ার অনুকূল ঘটনা হল ৩ ।

৯. **সরল ঘটনা (Simple Events):-** কোনো পরীক্ষণের ঘটনার নমুনাবিন্দুগুলোকে যখন আর কোনো ঘটনায় বিশ্লেষণ করা যায় না তখন তাকে সরল ঘটনা বলে। যেমন-একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে তার {১,২,৩,৪,৫,৬} প্রতিটি ঘটনাই একটি সরল ঘটনা।

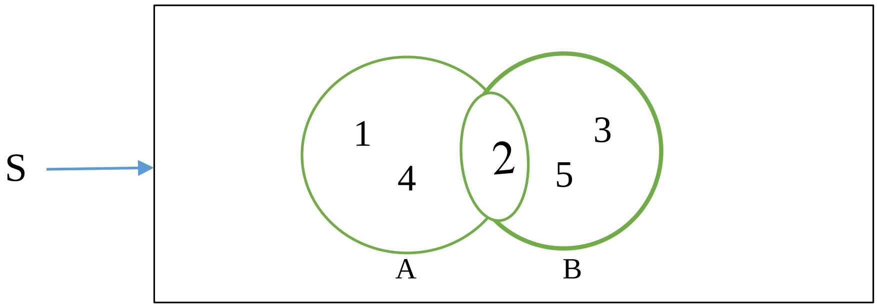
১০. **যৌগিক বা মিশ্র (Compound Events):-** যে সমস্ত ঘটনাকে একাধিক ঘটনায় বিশ্লেষণ করা যায় সে সমস্ত ঘটনাকে যৌগিক বা মিশ্র ঘটনা বলে । অথাৎ কোন পরীক্ষণের ঘটনার উপাদানগুলোকে যখন আরও কতকগুলো ঘটনায় বিভক্ত করা যায় তখন ঐ ঘটনাকে বলে যৌগিক ঘটনা। যেমন- একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে জোড় সংখ্যা উঠার ঘটনা হল ২, ৪ এবং ৬। এক্ষেত্রে ২ দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা উঠার ঘটনাও হল ২, ৪ ৬। এ ধরণের ঘটনাকে বলা হয় যৌগিক ঘটনা।

১১. **অসম্ভব ঘটনা (Impossible Events):-** যদি কোনো সমসম্ভব পরীক্ষায় আমরা নিশ্চিত করে বলতে পারি এইরূপ কোনো ঘটনা যা পর্যবেক্ষণে ঘটতে পারে না তবে এরূপ কল্পিত ঘটনাকে অসম্ভব ঘটনা (Impossible event) বলে । সাধারণত অসম্ভব ঘটনা $\phi$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং উহা ঘটবার সম্ভাবনা শূন্য অর্থাৎ $P(\phi)=0$। উদাহরণ:- একটি বাক্সে ৪টি লাল বল ও 5টি সাদা বল আছে । বাক্স থেকে 1টি বল তোলা হল । বলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা হবে শূন্য ।

১২. পরস্পর বর্জনশীল বা বিচ্ছিন্ন বা পৃথক ঘটনা (Mutually Exclusive Events):- দুই বা ততোধিক ঘটনা যদি পরস্পর এমনভাবে সম্বন্ধযুক্ত থাকে যে, তাদের কোনো দুটো ঘটনা এক সাথে ঘটা সম্ভব নয়, তাহলে ঘটনা সমূহকে পরস্পর বর্জনশীল বা বিচ্ছিন্ন বা পৃথক ঘটনা (Mutually Exclusive Events) বলে । যেমন: A={2, 4, 6}এবং B={1, 3, 5}ঘটনাদ্বয় পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা। নিম্নে ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখানো হল-


A ও B পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হলে-$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

১৩. পরস্পর অবর্জনশীল বা অবিচ্ছিন্ন ঘটনা (Non-Mutually Exclusive Events) :- কোন পরীক্ষণে দুই বা ততোধিক ঘটনার মধ্যে যদি সাধারণ বিন্দু (Common Element) থাকে, তাহলে উক্ত ঘটনাগুলোকে বলা হয় পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা। যেমন- A={1, 2,4} এবং B={2, 3, 5} ঘটনাদ্বয় পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা। নিম্নে ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখানো হল-




A ও B পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা হলে-$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (A \cap B)$ হবে।

**১৪. নিশ্চিত ঘটনা (Certain or Sure Events):-** কোনো সমসম্ভব পরীক্ষায় আমরা নিশ্চিত করে বলতে পারি এইরূপ কোনো ঘটনা যা পর্যবেক্ষণে ঘটতে পারে তবে এরূপ কল্পিত ঘটনাকে নিশ্চিত ঘটনা (Certain or Sure Events) বলে। উদাহরণ:-একটি মুদ্রাকে উপরের দিকে উৎক্ষেপণ করলে হেড অথবা টেল পড়বেই। নিশ্চিত ঘটনাকে সাধারণত S অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং তা ঘটার সম্ভাবনা P(S)=1.

**১৫. অনিশ্চিত ঘটনা (Uncertain Events):-** একটি পরীক্ষণে কোন একটি বিশেষ ঘটনা ঘটবে কি ঘটবে না তা যদি নিশ্চিত করে বলা না যায় তখন তাকে বলা হয় অনিশ্চিত ঘটনা। অনিশ্চিত ঘটনার সম্ভাবনা শূন্য হবে । তবে বাস্তবে সম্ভাবনার মান কখনও শূন্য হতে পারে না । যেমন- একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে ২ উঠার ঘটনা হল অনিশ্চিত ঘটনা।

**১৬. পূরক ঘটনা (Complementary events):-** একটি নির্দিষ্ট ঘটনার বিকল্প ঘটনাকে পূরক ঘটনা (Complementary event) বলে । উদাহরণ- 'হেড' ঘটার পূরক ঘটনা হল 'টেল' ঘটা । যদি A একটি ঘটনা হয় তবে পূরক ঘটনা $A^C$ বা $A'$ বা $\bar{A}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় ।

**১৭. সম্পূরক ঘটনা (Supplementary Events):-** কোন দৈব পরীক্ষণে প্রাপ্ত ফলাফলগুলো পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হলে এবং উহাদের সম্মিলিত সেট যদি নমুনাক্ষেত্রের সমান হয় তাহলে ঐ ঘটনাগুলোকে সম্পূরক ঘটনা বলে । যেমন- একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষার ফলাফল হচ্ছে A এবং B । যেহেতু উহারা পরস্পর বর্জনশীল এবং উহাদের সম্মিলিত সেট {H, T} হচ্ছে ঐ পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র। অতএব ঘটনাদ্বয়কে সম্পুরক ঘটনা বলে।

**১৮. সম্পূর্ণ ঘটনাসমূহ (Exhaustive Events):-** সমসম্ভব পরীক্ষার সঙ্গে সম্পর্কিত দুই বা ততোধিক ঘটনা যদি এমন হয় যে, পরীক্ষা বা পর্যবেক্ষণের প্রত্যেক ক্ষেত্রে ঘটনা গুলির মধ্যে কমপক্ষে একটি অবশ্যই ঘটবে, তবে উক্ত ঘটনাসমূহকে সম্পূর্ণ ঘটনাসমূহ বলে । উদাহরণ- ঝোঁকশূন্য মুদ্রাকে উৎক্ষেপণের সমসম্ভব পরীক্ষায় সংশ্লিষ্ট দুটি ঘটনা যদি A ও B হয়, A= হেড পড়ার ঘটনা ; B= টেল পড়ার ঘটনা; তবে A ও B ঘটনা দুটি সম্পূর্ণ (Exhaustive) কারণ পরীক্ষা বা পর্যবেক্ষণের প্রত্যেক ক্ষেত্রে A অথবা B যেকোনো একটি পড়বেই ।

**১৯. স্বাধীন ঘটনা (Independent Events):-**কোন পরীক্ষণে একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনার উপর অন্য একটি ঘটনা ঘটা নির্ভর না করলে এই ঘটনা দুটিকে বলা হয় স্বাধীন ঘটনা। যেমন- একসাথে দু'টি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষণে একটিতে হেড (Head) উঠা এবং অপরটিতে টেল (Tail) উঠা পরস্পর স্বাধীন ঘটনা।

**২০. অধীন ঘটনা (Dependent Events):-** একটি পরীক্ষণে দু'টি ঘটনার মধ্যে একটি ঘটনা ঘটার কিংবা না ঘটার দ্বারা অন্য একটি ঘটনা ঘটা নির্ভর করলে শেষোক্ত ঘটনাকে বলা হয় নির্ভরশীল বা অধীন ঘটনা। যেমন- একটি বাক্সে দু'টি লাল বল এবং দু'টি কালো বল আছে। দৈব চয়নের মাধ্যমে একটি বল বাক্স থেকে তোলা হলে এবং বলটি লাল হলে দ্বিতীয় বার আরো একটি বল তোলা হলে বলটি লাল হবে কিনা তা নির্ভর করে প্রথম বার তোলা বলটি বাক্সে পুনরায় রাখা বা না রাখার উপর। এক্ষেত্রে, প্রথম বার তোলা লাল বলটি হল স্বাধীন ঘটনা। এবং দ্বিতীয় বার তোলা বলটি হবে অধীন বা নির্ভরশীল ঘটনা।

**২১. যুক্ত ঘটনা (Joint Events):-** কোন পরীক্ষণে পরস্পর সম্পর্কিত দুই বা ততোধিক ঘটনা একত্রে ঘটলে উহাদেরকে যুক্ত ঘটনা বলে । নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে দেখানো হল,

| | ধুমপায়ী (S) | অধুমপায়ী (NS) | মোট |
|---|---|---|---|
| চাকুরীজীবি (E) | ১০ | ৩০ | ৪০ |
| ব্যবসায়ী (B) | ২০ | ৪০ | ৬০ |
| মোট | ৩০ | ৭০ | ১০০ |

চাকুরীজীবি ও ধুমপায়ী হওয়ার সম্ভাবনা, $P(E \cap S) = \frac{10}{100} = 0.1$

**২২. প্রান্তিক সম্ভাবনা (Marginal Probability):-** পরস্পর বর্জনশীল দুই বা ততোধিক সংযুক্ত ঘটনাগুলোর সম্ভাবনার সমষ্টিকে প্রান্তিক সম্ভাবনা বলে। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে দেখানো হল,

| | ধুমপায়ী (S) | অধুমপায়ী (NS) | মোট |
|---|---|---|---|
| চাকুরীজীবি (E) | ০.১০ | ০.৩০ | ০.৪০ |
| ব্যবসায়ী (B) | ০.২০ | ০.৪০ | ০.৬০ |
| মোট | ০.৩০ | ০.৭০ | ১.০০ |

এখানে চাকুরীজীবি ধুমপায়ী ও চাকুরীজীবি অধুমপায়ী পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা। ফলে উহাদের সম্ভাবনার সমষ্টি হচ্ছে প্রান্তিক সম্ভাবনা। অথাৎ E প্রান্তিক ঘটনা এবং P(E) হচ্ছে প্রান্তিক সম্ভাবনা। এখানে $P(E) = 0.10+0.30=0.40$ । অনুরূপভাবে P (B), P(S) এবং P (NS) ও প্রান্তিক সম্ভাবনা।

সহায়ক গ্রন্থসমুহঃ

Hoel, P.G. (1976), '*Elementary Statistics*, 4th ed.', Canada.

Gupta, S.P. & Gupto, M. P. (2008-09), *Business Statistics*, Sultan Chand & Sons, New Delhi, India.

মো. সাদেকুর রহমান (কাজল), (২০১৯-২০), *অর্থনীতির জন্য পরিসংখ্যান*, সমন্বয় পাবলিকেশন, ঢাকা-চট্রগ্রাম।

মো. শাহেদ আলী, (২০১০), *পরিসংখ্যান*, চলক প্রকাশনী, ৩৮, বাংলাবাজার (তৃতীয় তলা) ঢাকা-১১০০।

সুকেশ চন্দ্র জোয়ারদার, (২০১৬), *অর্থনীতির পরিসংখ্যান*, মিলেনিয়াম পাবলিকেশন্স, ঢাকা।